$0.\overline{9}$ 的診斷教學實驗

李源順(2001)：$0.\overline{9}$ 的診斷教學實驗。科學教育研究與發展季刊，第 25 期，31-48。

李源順 Yuan-Shun Lee

台北市立師範學院數學資訊教育學系
Department of Mathematics and Computer Science Education,
Taipei Municipal Teachers College

Add：台北市立師範學院數學資訊教育學系
(100)台北市愛國西路一號
Tel：23113040-1511

頁首短題：$0.\overline{9}$ 的診斷教學實驗

摘要

“$0.\overline{9}=0.9999...$ 是 0.9 多，所以小於 1”，這個想法對學生而言，是一個直觀的迷思概念。本研究旨在了解診斷教學策略是否能對有 $0.\overline{9}<1$ 的迷思概念的學生進行診斷，並製造這些學生的認知衝突，引起學生的認知不平衡，進而調整學生的認知再度到達認知平衡的狀態。研究方法採教學實驗法。診斷教學實驗是在兩個班級進行，一班是某師院學院數理系一年級學生在教授極限概念之前進行教學；另一班是某師範學院幼教系與特教系一、二年級學生在教授普通數學的小數與分數的互換單元時進行教學。

研究結果發現，診斷教學策略能有效破除學生的 $0.\overline{9}<1$ 的迷思概念；診斷教學實驗的教學成效以數理系學生比幼教系和特教系學生好，探究其原因是因為數理系學生學過極限的概念，幼教系與初教系學生沒有學過極限概念，所以數理系學生比幼教系與特教系學生更能破除 $0.\overline{9}=0.9999...$ 是 0.9 多，所以小於 1”的直觀迷思概念；$0.\overline{9}$ 的診斷教學適合做為極限概念的啟蒙教學。

關鍵詞：$0.\overline{9}$ 、0.999…、循環小數、診斷教學、啟蒙例

壹、前言

$0.\overline{9}=0.9999...$ 是否等於１這個問題，對高中生和大學生而言，是一個很難理解的問題。在國外，Szydlik(2000)訪談 27 位修讀第二學期微積分課程的大學生。結果發現，有 6 人(22%)回答 $0.\overline{9}=1$，有 19 人(70%)認爲 0.999<1，有 1 人(4%)說不能回答，另 1 人(4%)說他不知道 $0.\overline{9}=1$ 是否成立。在國內，研究者民國八十七年對國內某大學先修班的丙組一班學生進行調查發現，全班 43 人只有３人(7%)知道它的答案等於１。八十八年對某大學先修班甲組四班學生進行調查發現，全班２７人只有２人(7%)知道它的答案等於１。八十九年對某師範院校數理教育學系(簡稱數理系)一年級學生調查發現，28 人(50%)中有一半的學生認爲 $0.\overline{9}=1$。九十年針對某師範院校幼兒教育學系(簡稱幼教系)以及特殊教育學系(簡稱特教系)一、二年級學生調查發現全班 46 人中只有五個人(11%)認爲它等於１。其他的學生則一致認爲 $0.\overline{9}<1$。認爲 $0.\overline{9}<1$ 的學生，他們所持的理由，都是從數的直觀角度來說明：「因為 $0.\overline{9}$ 是 0.9 多，所以比 1 小」。進一步探究認爲 $0.\overline{9}=1$ 的同學，發現有些學生不畏言的說：「我只記得老師說過 $0.\overline{9}=1$，原因是什麼我忘了」；有些則記得老師利用代數的方法教過這樣的證明：

$$
\begin{aligned}
&\text{令} \quad x=0.9999\ldots \\
&\quad\quad 10x=9.999\ldots \\
&\text{兩式相減得} \\
&\quad\quad 9x=9 \\
&\text{所以} \quad x=1
\end{aligned}
$$

當研究者進一步問這些學生 0.9999….當中小數點後面的 9 比 9.999…小數點後面的 9 多還是一樣多時，大部份學生都無法肯定的告知研究者，兩者小數點後面的 9 一樣多。

近幾年來數學教育界的相關研究(林福來、郭汾派和林光賢，1995； Hart，1984；

Onslow，1986；Bell，1989；Tirosh & Stavy，1999)都已普遍接受，認為診斷教學是解決學生迷思概念的重要教學策略。國內學者，邱守榕(1999)、施皓耀(1998)、林振盛(1999)、呂玉琴(2000)、張英傑(2000)等人近年來也積極投入診斷教學相關研究，希望能幫助有迷思概念的學生破除他的迷思概念，並學得正確的概念。研究者(李源順和林福來，1998，2000)在進行教師專業成長的研究過程中，也利用診斷教學策略做為破除學生迷思概念的中心想法，幫助數學教師察覺他的教學問題、解決他的教學問題。研究結果發現，參與教師能認同診斷教學的理念，同時也在教學過程中，試圖進行診斷教學實作破除學生的迷思概念。

既然$0.\overline{9}<1$的迷思概念很難破除，數學診斷教學又是破除學生迷思概念的重要教學策略。研究者試圖查詢有關 0.999…的診斷教學相關研究。研究者查詢國家圖書館所建置的「中華民國期刊論文索引系統 WWW 版」、「中華民國期刊論文索引影像系統」、「全國博碩士論文資訊網」，台灣師範大學圖書館所建置的「教育論文線上資料庫」，Education Resource Information Center 所建置的教育資料庫 ERIC，以及相關的數學教育期刊，結果僅發現李龍甫 (1964)曾發表「循環小數 0.9 會不會存在」的相關報導性文章，以及 Szydlik(2000)發表「極限的信念和概念了解」，其中談到大學生對 0.999…的了解。其它付之闕如。此外，研究者也從林福來教授口述曾經有數學教師利用下列方式進行教學：

$$\text{因為}\quad 0.333\ldots=\frac{1}{3}$$

兩邊同乘以 3

$$3\times 0.333\ldots = 3\times\frac{1}{3}$$

$$\text{所以}\quad 0.999\ldots=1$$

研究者覺得上述利用代數方式的證明以及$\frac{1}{3}=0.333\ldots$再兩邊乘以 3 的教學，雖然可能讓學生認知 0.999…=1，但是總覺得無法讓學生破除「0.999…是 0.9 多，所以比 1 小」的直觀迷思概念。於是研究者設計了有認知衝突的診斷教學活動，針對有$0.\overline{9}<1$的迷思概念的理組和文組大學生進行診斷教學實驗，探究學生的迷思概念是否因此破除。

貳、文獻探討

本節從診斷教學理論以及$0.\overline{9}$的相關概念兩方面進行文獻探討，之後設計$0.\overline{9}$的診斷教學教案。

一、診斷教學理論

診斷教學理論的承襲可以回溯到所謂的新式 Piaget 教學法(Bell，Costello & Kuchemann，1983)。Piaget 的認知發展理論認為人類處理資訊的容量會隨年齡增加而增大。Case(1975，1978)就根據這一個理論提出他的假設：「當學習者所處的學習環境，需求他掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向發展出合理但過於簡化的解題策略」，就是所謂的學童法。面對學童法的錯誤，Hart(1984)、Bell(1992)和林福來、郭汾派和林光賢(1995)等人認為在教學設計時務須使用診斷教學策略，使學生有機會主動察覺自己錯

了，造成學生認知上的不平衡，進而產生認知調整的學習需求。

Bell(1992)經過多年的研究之後，提出診斷教學法(Bell，1992)的理論特性如下：

- 呈現的問題活動，要和學生以前的學習經驗相連結
- 選擇的問題，要涵蓋關鍵的概念和可能的錯誤概念
- 設計的活動，要能引起有錯誤概念的學生的認知衝突
- 提供學生正確性的回饋
- 針對所要化解的衝突徹底討論，並且形成新的整合性知識結構
- 在所討論的課題內形成關鍵性原則，利用進一步的問題做回饋，以鞏固學生的概念
- 利用彈性的問題，確保不同初始概念了解層次的學生都有適當的挑戰性
- 在未來的學習過程中，適時重返相同的概念點(包括利用不同的脈絡)，直到產生持久且可遷移的了解。

林福來(1999)所主持的教學思維討論小組在經過多年的教學研究與討論之後，將診斷教學理論的實行步驟化。他們將診斷教學實作分為三個步驟：學生所犯迷思概念的診斷，針對學生的迷思概念進行認知衝突，以及調整學生認知的教學。教學思維討論小組(林福來，1999)同時把教師在教學時有關診斷教學實作的表現，細分如下：

(1)、迷思概念

依教師對於學生的迷思概念所表現的行動，分成四類：A. 教師採取忽視的行動，B. 教師理會學生所犯的迷思概念，C. 教師直接告知學生會犯的迷思概念，D. 教師能診斷學生的迷思概念。

(2)、認知衝突

依教師對學生所犯的迷思概念，是否有進行認知衝突教學的意圖，分為三類：A. 沒有意圖，B. 教師雖然有意圖，但未能對學生形成認知衝突，C. 已造成學生的認知衝突。

(3)、調整教學

依教師對學生的迷思概念所做的教學行動，分為下列四類：A. 教師沒有處理學生的迷思概念，B. 教師僅進行程序性的教學，C. 教師能針對關鍵概念進行教學，D. 教師能利用有效教學策略使學生的認知再度平衡。

依據林福來(1999)所擬的三個步驟，所謂的診斷教學就是教師在教學的過程中，能診斷學生容易犯的迷思概念，設法利用認知衝突造成學生認知上的不平衡，之後再利用有效的教學策略使學生的認知再度平衡。

國內外有相當多的教學實驗是依據診斷教學的理念設計執行。例如 Hart(1984)針對在圖形比例縮漲問題中使用加法策略的學生，利用方格紙與計算器的實驗教學，讓學生使用加法策略的學生察覺計算結果與事實不符的認知衝突，進而調整自己的認知而證實有良好的成效。Booth(1984)以數學機器的模型輔以計算器的使用，並透過同儕討論的方式，在文字符號的單元上診斷學生的迷思概念，並進一步調整學生的認知而獲得良好的教學成果。Onslow(1986)利用訪談和測驗辨識學童對比例的錯誤概念之後，設計有認知衝突與討論的課堂教學，並進行教學實驗，結果發現使用診斷教學的班級比控制組的班級，對學生錯誤概念的改善維持超過 10 週的效果。Bell(1989)的實驗也證明了以解題、討論、認知衝突為主的診斷教學比以能力取向的教科書進行引導發現式教學的學習效果與學習興趣要好。Bell(1994)的另一個教學實驗中，讓學生先自己解答問題，再利用同儕

間的討論與辯論或利用不同的問題表徵 (數線、數) 與計算器來產生認知衝突，然後經由深入徹底的討論以強化概念，也獲致相當正面的成果。Tirosh & Stavy(1999)界定出四種關於兒童學習數學的直觀規則理論(intuitive rules theory)：A 比較多則 B 比較多，A 相同則 B 相同，凡事總有盡頭，以及凡事可被分割。直觀規則理論讓我們可以預知學生的答案是否正確。Tirosh & Stavy(1999)因此可以事先設計並利用呈現矛盾的具體證據，呈現和原問題相類似但能誘發正確答案的問題，或呈現正式的知識以製造學生的認知衝突和認知調整。在國內，林福來、郭汾派、林光賢(民 84)的教學實驗利用相似人形爲材料，使在比例單元中利用加法策略的學生，因爲使用不當的加法而產生原來有脖子的人與「脖子不見了」的不相似性之認知衝突，再進行圖形放大縮小的學習活動，獲致良好的教學成效。這些成果顯示診斷教學已具有相當充分的實驗證據，是一種有效的數學教學策略。

二、$0.\overline{9}$ 的概念

研究者查詢書報期刊，以及利用網際網路搜尋 $0.\overline{9}$ 的相關文獻，發現這類的文獻相當的少。在國外，Szydlik(2000)針對 577 位就讀 31 節第二學期微積分課程的大學生，進行有關極限概念的了解和信念的問卷調查之後，再選出具有代表性的 27 位學生進行訪談。0.999…＝1 是其中一個訪談問題。訪談發現，這 27 位大學生當中，只有 6 人(22%)回答 0.999…=1，他們所持的理由是把 1 和 0.999…相減並不能得到任何正數，或者他們做過這類的證明。有 19 人(70%)認爲 0.999<1，他們的理由是 0.999…和1的距離是無限小。有 1 人(4%)說不能回答，因爲 0.999…永遠不會停止。另 1 人(4%)說他不知道 0.999…=1 是否成立。在國內，李龍甫 (1964)曾發表「循環小數 0.9 會不會存在」的報導性文章。除此兩篇文章之外，研究者並沒有找到其它相關的研究。

研究者從數學知識的角度剖析 $0.\overline{9}=1$ 的概念，發現 $0.\overline{9}=1$ 是一個極限的概念。我們可以造一個數列 $\{a_n\}$，a_n=0.99⋯9 有 n 個 9，此時 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$。當我們在解釋 $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$ 的極限問題時，也時常令 x=0.9，0.99，0.999，…來讓學生感受 x 愈接近 1 時，x+1 會愈來愈趨近於２。$0.\overline{9}$ 是極限的概念卻沒有極限的形式，所以它是一個很難理解的問題。

極限的概念是微積分概念的精神所在，卻是一個很難解的概念。在歷史上，Zeno(西元前 490~430)的悖論困惑著世人一段很長的時間。其中有關二分法悖論(Boyer，1949；Kline，1972；引自李肖梅，1993)是這樣子的：

> 某一跑步者做如下的推論。在跑步者到達終點之前必須先經過路程的中點。然後必須再跑到 3/4 處，它剩下路程的一半。而跑步者在跑完最後的 1/4 之前，必須跑到這段路的中點。因為這些中點是沒有止境的，因此，跑步的者將根本不能到達終點。

當時的數學家對面這個隱含無限概念的悖論無法釋疑，直到十六世紀極限的概念才建立完成。

極限的概念困惑著古人多時，對現代學生也一直是很難理解的概念。因爲我們從日常生活當中，幾乎沒有經驗過無限或極限的概念，因此左太政(1994，1995)針對大一學生的微積分進行教學實驗發現大部份學生對 $\varepsilon-\delta$ 的關係未能掌握，對於極限的概念仍停留在抽象符號的階段。這也就是說，這些大學生對於極限的概念沒有感覺。

$0.\overline{9}=1$ 的概念是極限的概念，可是我們對它的教學不從極限的概念著手，卻都是利用代數的證明方法來證明它，也難怪學生對它沒有太多的感覺而很難克服「因為它是 0.9 多，所以比 1 小」的直觀迷思概念。

三、$0.\overline{9}$ 的診斷教學設計

依據林福來(1999)所擬的診斷教學三個步驟，第一個步驟就是要診斷學生的迷思概念。我們已經了解高中生、大學生有 $0.\overline{9}<1$ 的迷思概念，在適當時機的教學過程中，例如，循環小數和分數的互換教學或者極限概念的教學，便可以拋出此一問題，然後利用師生互動的方式，診斷出有迷思概念的學生。

診斷教學的第二個步驟就是要製造有迷思概念學生的認知衝突。要製造學生的認知衝突，主要是讓 $0.\overline{9}<1$ 的觀點與學生所認知的事實或定理產生互相矛盾的情形。研究者剖析問題發現，假如學生相信 $0.\overline{9}<1$，那 $0.\overline{9}$ 和 1 就是兩個不相同的數。由數的稠密性，任何兩個相異的(有理)數之間有無限多的(有理)數，或者任何兩個相異的點之間有無限多個點。但是我們在 $0.\overline{9}$ 和 1 之間找不到任何一個數，因此 $0.\overline{9}<1$ 與任何兩個相異的(有理)數之間有無限多的(有理)數兩者可以製造學生的認知衝突。

研究者的經驗發現，上述的認知衝突，有些學生不見得會相信 $0.\overline{9}<1$ 錯了，他寧可相信他在 $0.\overline{9}$ 和 1 之間找不到任何數。假如我們把數的概念換成點的概念，則相對的概念是任何兩個相異的點之間有無限多個點。這個概念卻又和直觀不相吻合。因爲我們在日常生活當中兩個人或者兩個珠子併排，其中再也擺不進去一個人或一個珠子的經驗；我們把一條土司用切一半的方式一直切下去，到後來會出現不能再切下去的直觀經驗。因此上述的認知衝突，學生不見得會相信 $0.\overline{9}<1$ 錯了，他可能相信數(點)的稠密性錯了，因爲它與日常生活的經驗不符。

“無限多就不可能出現最後一個”的直觀概念，似乎可以做爲 $0.\overline{9}<1$ 的認知衝突。研究者剖析我們解答兩數的大小問題時，時常利用兩數相減來處理，因此假如要求有迷思概念的學生計算 $1-0.\overline{9}$ ，學生會察覺答案是 0.000…，所以 $0.\overline{9}=1$，或者學生的答案會是 0.000…1($=0.\overline{0}1$)，即小數點後面有“無限多個０”再一個１。“無限多個 0”再一個 1，與學生的事實認知“無限多個，就不可能有最後一個”相衝突。此時，學生無法再反駁，因此有可能懷疑 $0.\overline{9}<1$ 錯了。

診斷教學的第三步驟是爲有迷思概念的學生進行認知調整。因爲 $0.\overline{9}=1$ 是極限的概念，我們當然要從這個關鍵概念進行認知調整。這方面對於正要學極限的概念，或即將要學極限概念的學生而言，可以把學生的認知調整到正確的概念上，或者讓學生更清楚的了解極限的概念是什麼，讓學生在學極限的概念前和先前所學概念相連結。當然林福來口述數學老師所用的教學略策“$\frac{1}{3}=0.333\ldots$再兩邊乘以３”也可以做爲一種強化學生認知的調整教學。

參、研究綜述

本研究的目的在利用診斷教學策略幫助有 $0.\overline{9}<1$ 迷思概念的學生進行認知調整，並檢驗診斷教學實驗的成效。研究方法採用教學實驗法。參與教學實驗的班級有兩班。一班是國內某師範學院數理系一年級學生 28 人，他們在高中時期已經學過微積分。另一班是國內某師範學院一、二年級幼教系與特教系學生 46 人，他們在高中時期沒有學過微積分。教學實驗的時間點，數理系學生是在 89 學年度上學期教授微積分的極限概念之前進行。幼教系與特教系學生是在 89 學年度第二學期教授普通數學課程的有理數單元，當中小數和分數的互換時進行。教學實驗由研究者親自進行教學。教學實驗成果的

檢驗，數理系學生是在教授將近一學年的微積分課程後進行。幼教系與特教系學生則是在教授完 $0.\overline{9}=1$ 的概念之後即時進行。

收集的資料包括研究者的課堂教學實況、學生回答相關問題的人數統計，以及要求學生回答研究者所提問的開放性問題。所收集資料的信度與效度是利用學生回答相關問題的所有可能情形的人數統計來確認，以及學生對開放性相關問題的回答來檢驗。

肆、診斷教學實驗過程

數理系學生的診斷教學實驗流程大致如下。研究者先**複習以前所學的概念**或者讓學生認知數系內的重要概念：任何兩個數(有理數)之間可以找到無限多個數(有理數)，或者任何兩點之間可以找到無限多個點；再來**診斷學生對於 $0.\overline{9}$ 的迷思概念**：$0.\overline{9}<1$；之後為有迷思概念的學生進行**認知衝突**教學：雖然我們認知任何兩個點之間可以找到無限多個點，可是我們在 $0.\overline{9}$ 和１之間找不到任何數，以及 $0.\overline{0}1$ (無限多個 0 後面再一個１) 與既然是無限多個就不可能有最後一個的認知衝突；最後再為有迷思概念的學生**進行認知調整**：$0.\overline{9}$ 是極限的概念，以及可以利用 $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$，再兩邊乘 3 得證。

下面是針對數理系學生進行診斷教學實驗的教學原案轉錄。至於幼教系及特教系學生的診斷教學實驗過程略有差異。差異的地方，下文將另行補述。

段落	教　　學　　原　　案	備　　註
1	T：0 和 1 之間有多少個數或點？ S：有無限多個。 T：好。那找出 0 和 1 之間的五個數給我。 S：0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5。	1~5 段落是先備知識 T：代表教師 S：代表學生
2	T：很好。那 0 和０.1 之間又有多少個數或點？ S：有無限多個。 T：那找五個數給我。 S：0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05。	
3	T：很好，那 0 和 0.0000000001，9 個 0 之後一個１，之間又有多少個數或點？ S：有無限多個。 T：找五個數給我。 S：0.00000000001，10 個０之後一個 1，0.00000000002，0.00000000003，0.00000000004，0.00000000005。	
4	T：好，那請問你，任何兩個數 a, b 之間有多少個數？a<b 好了。 S：有無限多個。 T：找五個數給我。 S：… T：能不能找得到？ S：$a+\frac{n}{m}(b-a)$，n 比 m 小。 T：很好。各位同學知道它的意義嗎？例如，$a+\frac{1}{2}(b-a)$，意思是把	有些學生開始出現困難。 有些學生回答。

	a 的坐標再加上 a, b 長度的一半，就會再 a 和 b 之間。$\frac{1}{2}$ 可以變成任何真分數，所以，a 和 b 之間有無數多個數或點。	
5	T：這個思意是說，我們可以得到一個性質：**任何兩個數之間，不管那兩個數有多接近，它都有無限多個數在此兩數之間**。同不同意？ S：同意。 T：由於在實數系上任何一個數都可以對應到數線上的一個點，同時數線上的任何一個點在實數系上也可以找到一個數與它對應。那這個意思是說：**任何兩個點之間，不管那兩個點有多接近，它都有無限多個點在此兩點之間**。同不同意？ S：同意。 T：那這個意思是說**任何一個點，能不能找不到它旁邊的點**？或者**任何一個數能不能找不到它旁邊的數？** S：不能。 T：對，不能，因爲對於一個數，你再找出一個數的時候，這兩個數當中就會有無限多個數。這個意思也就是說，對於一個點，當你再找出另一個點的時候，這兩個點當中就會有無限多個點。對不對？ S：對。	
6	T：好。那現在請問 $0.\overline{9}=0.99999\ldots$ 大於１，小於１，或者等於１？ S：小於 1。 S：等於１。 T：等於１的舉手。 (研究者清點人數，數理系有 14 人，即 50%的學生舉手，幼教系和特教系有 41 人，即 89%的學生舉手) T：好，小於１的舉手。 (研究者清點人數，數理系有 14 人，即 50%的學生舉手，幼教系和特教系有 5 人，即 11%的學生舉手) (數理系以及幼教系和特教系學生全部都舉手表示自己的認知)	診斷迷思概念 大部份的學生回答
7	T：好，你說。為什麼小於 1？ S：因為 **0.9 多，所以比 1 小**。 T：很好。既然是 0.9 多，當然比１小。有沒有問題？ (學生都沒回答，有些人點點頭表示同意)	直觀
8	T：好，0.99999…既然小於 1。可是我們剛剛說過，任何兩個數之間可以找到無限多個數。現在請你找一個在 0.99999…和 1 之間的數給我。 S：**(有些學生回答)0.999999。** (註 -- 幼教系和特教系學生回答：和剛才一樣，0.999999 之後再寫 1，2，3) S：(有些學生回答)不對，它不在 0.99999…和 1 之間。 S：找不到 0.99999…和 1 之間的數。	診斷迷思概念 學生自行反駁

9	T：可是我們剛剛不是說過嗎？任何兩個數之間有無限多個數啊？因爲 0.99999…比 1 小，所以在 0.99999…和 1 之間應該有無限多個數啊？ S：不對，**0.99999…就是在 1 旁邊的數，剛才講的性質錯了**。 T：剛才講的性質錯了。對啊，我們日常生活中，一個人旁邊假如再站一個人，中間就擠不下另一個人，所以我們找到１的旁邊的數了。很好。和直觀很吻合。 (學生點點頭) T：那怎麼辦？你們確定嗎？ S：確定。因爲 0.99999…<1，又沒有數在它們之間，所以 0.99999…就是 1 旁邊的數。	認知衝突 學生修正先前的概念
10	T：好。**從另一個方向來思考問題**。要知道兩個數誰大誰小可以用什麼方法來判別？ S：用減的。 T：很好。請告訴我 1-0.99999…等於多少？ S：(有些學生回答)0.000001。 S：(有些學生回答)不對。 S1：對了，應該是**“0.”後面有無限多個０，再多一個１**(即$0.\overline{0}1$) T：很好。我以前也曾經這樣想過。請再說一遍。 S1：“0.”後面有無限多個０，再一個１。 T：再說一遍。 S1：0.“後面有無限多個０”，再一個１。 S2：**怎麼可能，無限多個０，後面怎麼還會出現一個１？** S1：**哇？**	診斷迷思概念 學生自行反駁 再一次的認知衝突
11	T：好奇怪？無限多個０後面還會出現一個１？感覺好像怪怪的。即然有無限多個，怎麼後還會有東西？好像和我們所認知的無限多不一樣哦。 T：那怎麼辦？無限多個０，後面不可能出現一個１？假如我們相信無限多個數的後面不可能還有一個數。那這個意思是說，我們並沒有找到 1 旁邊的數囉。所以我們並沒有反駁剛剛那個性質，對不對？ S：對。 S：？？？ （有些同學還是抱持懷疑的眼光）	鞏固先前的概念
12	T：事實上，$0.\overline{9}$ 的確等於 1。因爲它是一種極限的概念。這個意思是說，當 0.99999 假如 9 停下來，那麼它就比 1 小。這個時候它們中間就有限多個數。可是假如 9 一直 9 下去，沒有停下來，那麼假如它可以到“到最後”的話，它就會等於 1。這就是極限的概念。	認知調整

13	T：平常我們說，x 趨近於１時，f(x)=x+1 趨近於 2，這個意思是 x 很接近１，但是不等於１的時候，x+1 會很接近 2，但是不等於 2。因此我們用 x→1 時，f(x)=x+1→2 表示。假如 x 接近１一直下去，“到最後”f(x)才會等於２，記做 $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$。我們之所以可以寫“等號”是因爲我們用了“lim”這個極限的符號，“lim”的意思就好像是說一直這樣下去，“到最後”它會等於２。	
14	T：所以我們剛剛講的性質，任何兩個數之間有無限多個數，任何兩個點之間有無限多個點，還是成立。我們並沒有反駁這個性質。	
15	T：我再問各位一個問題好了。$0.\overline{3}$ 等於多少？ S：等於 $\frac{1}{3}$。 T：好。$0.\overline{3}=\frac{1}{3}$。把兩邊乘以 3，得到什麼？ S：$0.\overline{9}=1$。 S：真的耶。	再一次進行認知調整

研究者在教授幼教系和特教系學生時，因爲普通數學課程的銜接問題，直接先從第六個教學段落開始進行教學：問學生 $0.\overline{9}$ 大於１，或等於１，或小於１。在教完第七個教學段落之後，研究者故意問回答 $0.\overline{9}=1$ 的同學他所持的理由。結果有三位同學說他只記得高中老師教過，至於爲什麼會等於１，他說他忘了。有一位同學回答，高中老師用前言所述的代數方法解答這個問題。另一位同學則回答高中老師是用下面代數的方法解答：

令　$x=0.\overline{9}$

$10x=9.\overline{9}$

兩式相減得

$9x=9$

所以　$x=1$

當研究者再度要求認爲 $0.\overline{9}=1$ 的同學舉手時，發現沒有同學因爲他們的解釋而改變對 $0.\overline{9}=1$ 的認知。

之後研究者先回到第一到五個教學段落，複習學生的先備知識。由於文組學生抽象化的能力較薄弱，所以研究者省去第四個教學段落，只讓學生感受任兩點之間可以找到無限多個點即可。之後研究者回到第八個教學段落繼續進行教學。對於第九個教學段落，由於幼教系與特教系學生對老師的問話沒有反應，所以學生的反應，老師代爲說明。亦即學生的回答由研究者口述：

段落	教　　學　　原　　案	備　　註
9	T：可是我們剛剛不是說過嗎？任何兩個數之間有無限多個數啊？因爲 0.99999…比 1 小，所以在 0.99999…和 1 之間應該有無限多個數啊？ T：可是我們在 0.999…和 1 之間，卻找不到任何一個數。那表示說兩者之間一定有一個錯了。不是 0.999…=1，就是任何兩個	認知衝突

	數之間不一定找得到無限多個數，亦即我們找到 1 旁邊的數了，它就是 0.999…。對不對？ (學生點點頭)	

第九個教學落之後，繼續教授第十到十二個教學段落。由於幼教系與特教系學生的教學重點不是極限的概念，所以第十三個教學段落沒有進行教學。之後再進行第十四、十五個教學段落的教學。

伍、診斷教學實驗結果

診斷教學實驗結果發現，約有一半的幼教系和特教系學生能破除 $0.\overline{9}<1$ 的迷思概念。研究者對幼教系與特教系學生進行診斷教學實驗之後，再進行一次的調查發現，有25位(54%)的同學舉手回答 $0.\overline{9}=1$，有一位(2%)同學舉手回答認爲 $0.\overline{9}$ 仍然小於一，其餘20位(43%)同學則兩者都沒有舉手。進一步調查發現，這一班的學生都沒有學過極限的概念，所以有 20 位同學對於 $0.\overline{9}=1$ 仍然無法相信這是真的，因爲這些同學已經處於 $0.\overline{9}<1$ 的直觀的認知與無限多個數之後不可能有最後一個數的衝突之中。其中一位仍然認爲 $0.\overline{9}<1$ 的同學，經進一步的確認，發現他的邏輯推理有待加強。他說：「我仍然相信任何兩個有理數之間有無限多個有理數，所以 $0.\overline{9}$ 和 1 不相等」。待研究者再跟他解釋：「假如你相信任何兩個有理數之間有無限多個有理數，而且你認為 $0.\overline{9}$ 和 1 不相等，那表示你一定能在 $0.\overline{9}$ 和 1 之間至少找到一個數，可是你找得到嗎？你找不到，表示 $0.\overline{9}$ 和 1 不相等，這件事不對，所以 $0.\overline{9}$ 應該等於 1」。研究者在回答的過程中，他點點頭，似乎表示同意。

診斷教學實驗結果發現，所有數理系學生能破除 $0.\overline{9}<1$ 的迷思概念。數理系學生的實驗調查是在上完將近一學年的微積分課程後進行。結果發現26位數理系學生(第一學期有28位學生，其中一位休學準備重考，另一位因爲學分抵免而免休下學期的微積分)當中有21位(81%)舉手回答確認 $0.\overline{9}=1$。由於另外5位同學(19%)當時正在角落聊天，沒聽到研究者的問話，也沒察覺同學在舉手，所以研究者一一要求這5位回答問題，結果發現這5位同學也相信 $0.\overline{9}=1$。當研究者問說：「為什麼？」時，他們都是用代數運算的方式回答。於是研究回頭反問其他21位同學「為什麼」時，有一部份的同學回答說：「這是極限的概念」。當研究者再次問說：「這是極限的概念嗎？」，結果發現，絕大部份的同學都回答：「是」。若將數理系學生診斷教學前後相對照，發現實驗前有一半的同學認爲 $0.\overline{9}<1$，實驗後全體學生都能認知 $0.\overline{9}=1$。這個意思是說，所有有迷思概念的學生都能破除 $0.\overline{9}<1$ 的直觀迷思。

陸、討論

本節旨在對診斷教學實驗過程與結果進行反思。

1、診斷教學策略能有效破除學生的迷思概念

本研究的診斷教學實驗結果發現，數理系學生原先只有50%的學生相信 $0.\overline{9}=1$，診斷教學實驗之後，100%的學生相信 $0.\overline{9}=1$。同時，數理系學生原本不了解 $0.\overline{9}$ 是一種極限的概念，他們只會利用代數的方式理解問題，診斷教學實驗之後，大部份學生已經了

解它就是一種極限的概念。

幼教系和特教系學生原先只有 11%的學生相信$0.\overline{9}=1$，89%的學生相信$0.\overline{9}<1$。診斷教學實驗之後，有 52%的學生相信$0.\overline{9}=1$，有 43%的學生沒有表示他們的看法，他們雖然不十分肯定$0.\overline{9}=1$，卻已經開始懷疑$0.\overline{9}<1$ 的直觀。

2、學過極限概念的理組學生比沒學過極限概念的文組學生診斷教學成效好

對數理系的理組學生以及幼教系與特教系的文理學生所做的診斷教學實驗發現，數理系學生已經全部相信$0.\overline{9}=1$，幼教系和特教系學生仍然有將近一半的學生懷疑$0.\overline{9}$是否等於１。理組學生的教學實驗結果比文組學生的教學實驗結果成效較好。

進一步探討理組學生的教學實驗結果為何比文組學生的教學實驗結果好，發現理組學生在高中時期已經學過微積分，他們已經學過極限的概念，因此研究者在進行認知調整時，他們能夠理解$0.\overline{9}$為何可以等於１。文組學生則因為高中時期，甚至大學時期也沒有學過極限的概念，他們沒有極限的概念，因此初次接觸極限概念的文組學生，還有一部份學生懷疑而不能接受$0.\overline{9}=1$。

3、$0.\overline{9}$的診斷教學適合做為極限概念的啓蒙教學

在學生學習新的概念時，老師利用 Example-rule 的教學方式引導學生在具體的操作中，將例子的特性抽象化形成新的概念。這樣的例子就叫做啓蒙例(林福來，1999)。一個好的啓蒙例可以做為學生學習抽象數學概念的具體媒介，讓學生能清楚的了解新概念的意義。因為$0.\overline{9}$是一個中學生或大學生所熟知的循環小數，在進行極限概念的啓蒙教學時，$0.\overline{9}=1$ 的診斷教學可以讓學生察覺原來他以前接觸的問題中已隱含極限的概念，讓學生對極限的概念有一種具體的經驗，再內化成極限的抽象概概念。

研究者對沒有學過極限概念的幼教系與特教系文組學生所做的診斷教學實驗，已經讓他們對極限的概念有了初步的認識。雖然研究者在文組的診斷教學之後，只初淺的交待它是極限的概念，並沒有機會繼續進行極限概念的教學，但是研究者對數理系學生的診斷教學實驗結果調查發現，學生已經成功的極限概念與$0.\overline{9}=1$ 的概念相結合。因此研究者認為$0.\overline{9}$的診斷教學可以做為極限概念的啓蒙教學，讓學生清楚的了解極限概念的內涵，有助於他們對極限概念的了解。

附記：本研究資料能順利收集，必須感謝所有參與同學，在此表達十二萬分的謝意。

柒、參考文獻

左太政(1994)：高中數學課程的發展對大一微積分教學影響之調查研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告。未發表。

左太政(1995)：改進大一微積分教學之實驗研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告。未發表。

呂玉琴(2000)：兒童分數概念調查及診斷教學之研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃書。未發表。

李肖梅(1993)：從微積分發展史看極限概念的演變(一)。科學教育月刊，第 164 期，pp.31-37。

李源順和林福來(1998)：校內數學教師專業發展的互動模式。師大學報：科學教育類，43(2)，pp.1-23。

李源順和林福來(2000)：數學診斷教學能力的培育。師大學報：科學教育類，45(1)，

pp.1-25。
李龍甫(1964)：循環小數 0.9 會不會存在。國民教育，14(8)，p.3。
邱守榕和林振盛(1999)：遠距診斷教學模式與數學科教學知識庫之建立。行政院國家科學委員會專題研究計劃進度研究報告。未發表。
林振盛(1999)：遠距診斷教學模式與數學科教學知識庫之建立 － 子計劃 III：遠距教學即時診斷之因應對策與教學知識庫之研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃研究報告。未發表。
林福來、郭汾派和林光賢(1995)：比例推理的迷思概念診斷與補救。科教研討會論文彙編。
林福來(1999)：教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(3/3)。行政院國家科學委員會專題研究計劃進度報告。未發表。
施皓耀(1998)：錯誤類型迷思概念的診斷與補救教學模式的研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃進度研究報告。未發表。
張英傑(2000)：兒童幾何形體概念調查及診斷教學之研究。行政院國家科學委員會專題研究計劃書。未發表。
Bell，A.W.(1989). Teaching for the test. The Times Educational Supplement. Outlines the Shell Centre's research into diagnostic teaching methods.
Bell，A.W.(1992). Diagnostic teaching. Selected Lectures from the 7th lnternational Congress on Mathematical Education. pp.19-34.
Bell，A.W.(1994). Some experiments in diagnostic teaching. Educational Studies in Mathematics，24(1)，pp115-137.
Bell，A.W.；Costello，J. & Kuchemann，D.(1985). Research on learning and teaching，N.F.E.R.—Nelson.
Booth，L.R.(1984). Algebra：Children's strategies and error. N.F.E.R. Nelson.
Case，R.(1978). The developmentally based theory and technology of instruction. Review of Educational Research，48(3). Pp.439-463.
Hart，K.M.(1984). Ratio：Children's strategies and errors. N.F.E.R. Nelson.
Onslow，B.A.(1986). Overcoming conceptual obstacles concerning rates：Design and implementation of a diagnostic teaching unit. The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy.
Tirosh，D. & Stavy，R.(1999). The intuitive rules theory and inservice teacher education. Proceedings of the 1999 International Conference of Mathematics Teacher Education. Department of Mathematics National Taiwan Normal University. Taipei，Taiwan. pp.205-225.
Szydlik, J. E.(2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 31, No.3, pp.258-276.

Diagnostic teaching experiment of $0.\overline{9}$

Yuan-Shun Lee
Department of Mathematics and Computer Science Education, Taipei Municipal Teachers' College

Abstract

"Because $0.\overline{9} = 0.9999...$ is equal to 0.9 and more, ~~so~~ it is less than 1" -- this is a misconception of intuition to the most of students.

~~This~~ The aim of our study is to know that whether ~~use~~ the diagnostic teaching can be used to diagnose those students whose have the misconception of $0.\overline{9} < 1$ ~~of students.~~ We also provide them with a conflict of cognizance to make ~~ing~~ their cognitive imbalance, and then we modify them such that their cognitive structure are re-balance.

Diagnostic teaching experiments were teaching in two classes. One is the freshman of Department of Mathematics and Science Education of Teachers' College, who had learned the conception of limits. The other is the freshman and the sophomore of Department of Early Childhood Education ~~of Teachers' College~~ and of Department of Particular Education of Teachers' College, who didn't learn~~ed~~ the conception of limits.

We found that the diagnostic teaching can regulate the misconception of $0.\overline{9} < 1$,that the effective of the diagnostic teaching ~~is best~~ in the freshman of Department of Mathematics and Science Education is better than that in the freshman and the sophomore of Department of Early Childhood Education and Department of Particular Education, and that the diagnostic teaching of $0.\overline{9}$ is fit for initial teaching of limit conceptions.

Keyword: $0.\overline{9}$, 0.999…, repeating decimals, diagnostic teaching, initial teaching